Nexo Revista Científica

ISSN 1818-6742
Impreso en Nicaragua.
www.uni.edu.ni/Nexo

Vol.21, No.2, pp.77-83/Abril 2009

Sobre dimensiones de Modelos de Gel'fand

Dr. José O. Araujo

NuCOMPA-Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN
Paraje Arroyo Seco s/n, 7000, Tandil, Argentina
Araujo, J. O. araujo@exa.unicen.edu.ar
Paz, K. A. kapaz@exa.unicen.edu.ar

(recibido/received: 14-Oct-2008; aceptado/accepted: 27-Marzo-2009)

RESUMEN

En este artículo se presenta una expresión para la dimensión de un modelo de Gel'fand del grupo simétrico generalizado $\mathfrak{S}_n^m$ o grupo de reflexiones unitarias de tipo $G(m,1,n)$. De la misma se concluye que esta dimensión coincide con el número de elementos que se representan como productos de reflexiones cuyas raíces son ortogonales dos a dos.

ABSTRACT

In this article we present the term for the expression of the Gel'fand model belonging to the generalized symmetrical group $\mathfrak{S}_n^m$ or group of unitary consideration type $G(m,1,n)$.From this we conclude that this aspect coincides with the number of elements which are represented as products of reflection the roots of which are orthogonal two to two.

1. Introducción.

Un *modelo de Gel´fand* para un grupo finito G, es una representación ordinaria de G cuyo carácter es la suma de todos los caracteres irreducibles de G.

Notaremos con $\gamma(G)$ a la dimensión de un modelo de *Gel'fand* para el grupo finito G. Un resultado particularmente interesante sobre $\gamma(G)$, se da en la situación en que todas las representaciones irreducibles de G pueden ser realizadas sobre los números reales. En tal caso, como consecuencia del indicador de *Fröbenius-Schür*, ver [James] o [Curtis], se obtiene que $\gamma(G)$ es igual al número de involuciones en G, es decir:

$$\gamma(G) = |\{\sigma \in G : \sigma^2 = e\}|$$

aquí las barras indican el cardinal del conjunto y e es el elemento neutro de G.

En el caso de los grupos de reflexiones euclidianas, ver [Springer], todas las representaciones de un grupo de *Weyl* pueden ser realizadas sobre los números racionales, mientras que para los grupos de *Coxeter* H_3 y H_4 las representaciones se realizan sobre los números reales. Naturalmente que esta información es de suma utilidad a la hora de estudiar modelos de Gel'fand para estos grupos.

En el caso del grupo simétrico generalizado o grupo de reflexiones unitarias $G(m,1,n)$, las representaciones pueden realizarse sobre extensiones ciclotómicas, ver [Can, H.]

Para la teoría de grupos de reflexiones en general puede consultarse [Cohen],[Hum],[Kane] y [ShephTodd].

2. Construcciones de modelos de Gel'fand.

Este concepto de modelo de Gel'fand aparece hacia 1981, justamente a partir del trabajo de *Bernstein*, *Gel'fand* y *Gel'fand* en [BGG], donde presentan modelos para grupos de Lie compactos. A partir de entonces hay diversas construcciones de modelos de Gel'fand realizadas por distintos autores.

En [Klyachko], *Klyachko* presenta un modelo para $Gl_n(F_q)$ presentado con suma de caracteres inducidos. En [PanSoto], *Pantoja* y *Soto-Andrade* lo hacen para un grupo de Movimientos rígidos, en [IngSaxl], *Inglis* y *Saxl* para el grupo simétrico, en [Bad], *Baddeley* estudia modelos por involuciones, en [HZ], *Howlett* y *Zworestine* retoman el modelo de *Klyachko* desde un enfoque más actual.

Kodiyalam y *Verma* en [KodiyaVer], presenta una construcción particularmente simple de modelo para el grupo simétrico desarrollado sobre la potencia exterior $K^n \wedge K^n$. Finalmente, *Adin*, *Postnikov* y *Roichman*, en [APR1] y [APR], lo hacen para el grupo simétrico y su álgebra de Iwahori-Hecke y para el grupo simétrico generalizado.

En [AA] se introduce un espacio $\mathcal{N}$, en anillo de funciones polinomiales $\mathcal{A} = K[x_1, \ldots, x_n]$, asociado con un subgrupo finito G de $Gl_n(K)$. El espacio $\mathcal{N}$ es un subespacio del espacio de polinomios G -armónicos, es decir del espacio:

$$\{P \in \mathcal{A} : \partial_Q(P) = 0, \forall Q \in \mathcal{A}_+^G\}$$

donde $\mathcal{A}_+^G$ son los polinomios G -invariantes con término constante igual a cero y:

$$\partial_Q = Q(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$$

Por otra parte:

$$\mathcal{N} = \{P \in \mathcal{A} : \mathcal{D}(P) = 0, \forall D \in \mathcal{W}_+^G\}$$

donde $\mathcal{W}_+^G$ son los operadores diferenciales G -invariantes en el álgebra de *Weyl* de la forma:

$$D = \sum_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta \quad \text{con} \quad |\alpha| < |\beta|$$

siendo:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \partial^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n}$$
$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \qquad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$$

Cuando K es algebraicamente cerrado, la representación natural de G sobre $\mathcal{N}$ contiene una copia de cada representación irreducible de G . Particularmente interesante es el caso en que G es un grupo de reflexiones, es conocido que si G es un grupo de reflexiones, ver [Kane], la representación de G sobre los polinomios G -armónicos es equivalente a la representación regular. Para los grupos diedrales, los grupos clásicos de tipo A_n, B_n, D_{2n+1} y para el grupo $G(n,1,m)$ (o grupo simétrico generalizado), $\mathcal{N}$ es un modelo de *Gel'fand*, ver [AA1], [A], [AB] y [AB1].

En el tratamiento de los grupos de tipo B_n y D_n , se hace uso del hecho que las representaciones de un grupo de Weyl pueden ser realizadas sobre los números racionales, ver [Springer], y en consecuencia, del conocimiento previo de la dimensión de un modelo de *Gel'fand* como el número de involuciones en el grupo.

Para un grupo diedral con $2n$ elementos, se mantiene que $\mathcal{N}$ un modelo de *Gel'fand* tiene por dimensión al número de involuciones en el grupo, es decir $n+2$ o $n+1$ según n sea par o impar. Es este caso se puede ver que $\mathcal{N}$ en $\mathbb{C}[x,y]$ el espacio de polinomios armónicos que son anulados por los operadores:

$$x^k\partial_y^{m-k} + y^k\partial_x^{m-k} \qquad 1 \le k \le n$$

3. Producto semidirectos.

El estudio de las representaciones irreducibles en productos semidirectos de grupos, presenta un caso destacable por su simplicidad. Este es el caso de un grupo finito G que se presenta como producto semidirecto de un subgrupo normal abeliano D y un subgrupo H, es decir:

$$G = D \times_s H$$

La construcción de las representaciones irreducibles en este caso puede ser obtenida como se describe a continuación, ver por ejemplo [Serre] o [Curtis].

Con cada carácter lineal χ de D consideramos el grupo de inercia de χ en H dado por:

$$I_\chi = \{\eta \in H : \chi^\eta = \chi\}$$

donde:

$$\chi^\eta(d) = \chi(\eta d \eta^{-1}) \qquad d \in D$$

Ahora, con cada representación irreducible μ de I_χ, definimos una representación $\chi\mu$ de $D \times_s I_\chi$ definida por:

$$\chi\mu(d,\sigma) = \chi(d)\mu(\sigma) \qquad d \in D, \sigma \in I_\chi$$

Dado que D es un subgrupo normal y χ es un carácter lineal, $\chi\mu$ queda bien definida sobre el espacio de representación de μ. Notamos con $\rho_{\chi\mu}$ a la representación de G inducida por $\chi\mu$.

Si $\mathcal{R}$ una familia de representantes de las G-órbitas en el espacio de caracteres lineales de D, entonces las representaciones irreducibles de G pueden ser parametrizadas como:

$$\widehat{G} = \left\{\rho_{\chi\mu} : \chi \in \mathcal{R}, \mu \in \widehat{I_\chi}\right\}$$

donde el sombrero indica, salvo equivalencias, el conjunto de todas de representaciones irreducibles del grupo considerado.

De lo anterior resulta:

$$\gamma(G) = \sum_{(\chi,\mu)\in\mathcal{R}\times\widehat{I_\chi}} [H : I_\chi]\mu(e)$$
$$= \sum_{\chi\in\mathcal{R}}[H : I_\chi]\left(\sum_{\mu\in\widehat{I_\chi}}\mu(e)\right)$$
$$= \sum_{\chi\in\mathcal{R}}[H : I_\chi]\,\gamma(I_\chi).$$

4. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$.

En el caso del grupo simétrico, las involuciones se expresan en forma única como producto de transposiciones dos a dos disjuntas, en consecuencia éstas pueden ser agrupadas según el número de transposiciones en que se descomponen.

Para un subgrupo $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{S}_n$, notaremos con $\mathcal{I}_k(\mathfrak{H})$, con $0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, al conjunto de las involuciones en $\mathfrak{H}$ que se descomponen como producto de k involuciones dos a dos disjuntas. También usaremos $\gamma_k(\mathfrak{H})$ para indicar el cardinal de $\mathcal{I}_k(\mathfrak{H})$.
Sin mayor dificultad puede establecerse que:

$$\gamma_k(\mathfrak{S}_n) = \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

Con cada una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ de n, asociamos el *subgrupo parabólico* $\mathfrak{S}_\lambda$ de $\mathfrak{S}_n$ dado por:

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

donde cada $\mathfrak{S}_{\lambda_j}$ está dado por:

$$\mathfrak{S}_{\lambda_j} = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i \text{ si } \lambda_1 + \cdots + \lambda_{j-1} < i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_j\right\}.$$

En virtud de la caracterización de las representaciones irreducibles de un producto cartesiano, se tiene:

Proposición ***i)*** *Las representaciones irreducibles de* S_λ *pueden ser realizadas sobre los números reales.*
ii) $\gamma(\mathfrak{S}_\lambda)$ *es el número de involuciones en* $\mathfrak{S}_\lambda$ *y se tiene:*

$$\gamma(\mathfrak{S}_\lambda) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \gamma_k(\mathfrak{S}_\lambda).$$

5. El grupo simétrico generalizado $\mathfrak{S}_n^m$.

Como ya hemos mencionado, $\gamma(G)$ es el número de involuciones en G en el caso de los grupos de reflexiones euclidianas. En virtud de los resultados de Carter en [Carter], en este caso, toda involución puede ser expresada como producto de reflexiones cuyas raíces forman un sistema ortogonal, de modo que resultan equivalentes ser involución y expresarse como producto de reflexiones asociadas a un sistema ortogonal de raíces.

En un grupo de reflexiones unitarias G, llamaremos *pseudo-involuciones* a los elementos en G que puedan ser expresados como producto de reflexiones asociadas a un sistema ortogonal de raíces.
El resultado que presentamos en este breve artículo es el siguiente:

Teorema 5.1. *i)* $\gamma(\mathfrak{S}_n^m)$ *coincide con el número de pseudo-involuciones en* $\mathfrak{S}_n^m$.
ii)

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$

Demostración: Presentamos el grupo simétrico generalizado como su representación geométrica dada por las matrices monomiales en $\mathbb{C}^{n\times n}$, cuyos coeficientes no nulos son raíces m-ésimas de la unidad. En esta situación se tiene:

$$\mathfrak{S}_n^m = \mathfrak{D} \times_s \mathfrak{S}_n$$

donde $\mathfrak{D}$ es el grupo de matrices diagonales raíces m-ésimas de la unidad en la diagonal principal y $\mathfrak{S}_n$ es el grupo simétrico identificado con las matrices permutacionales.
Resulta claro que el grupo de inercia de un carácter lineal de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{S}_n$ es conjugado con un subgrupo parabólico $\mathfrak{S}_\lambda$ para alguna partición λ de n. Por otra parte, cada subgrupo parabólico de $\mathfrak{S}_n$ es el grupo de inercia en $\mathfrak{S}_n$ de algún carácter lineal de $\mathfrak{D}$.
Notamos con $\mathcal{F}_n^m$ el conjunto de funciones de $\{1,2,\ldots,n\}$ a valores en $\{1,2,\ldots,m\}$. Cada elemento $\alpha \in \mathcal{F}_n^m$ induce una partición de n dada por:

$$\lambda_i^\alpha = |\alpha^{-1}(i)| \qquad 0 \leq i \leq m$$

Notemos que cada carácter lineal χ de $\mathfrak{D}$ puede identificarse naturalmente con una función en $\mathcal{F}_n^m$. Es este caso, dos caracteres lineales χ y ϕ de $\mathfrak{D}$ son equivalentes si existe $\pi \in \mathfrak{S}_n$ tal que:

$$\phi = \chi^\pi$$

pero, pensados como funciones, la identidad precedente se traduce en:

$$\alpha_\phi = \alpha_\chi \circ \pi^{-1}$$

de modo que el número de caracteres en la $\mathfrak{S}_n$-órbita de χ está dado por:

$$\frac{n!}{\lambda^\chi!} = [\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_{\lambda^\chi}].$$

De este modo, la expresión:

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{\chi\in\mathcal{R}} [\mathfrak{S} : \mathfrak{S}_{\lambda^\chi}]\, \gamma(\mathfrak{S}_{\lambda^\chi})$$

puede ser reescrita como:

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{\alpha\in\mathcal{F}_n^m} \gamma(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha})$$
$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{\alpha\in\mathcal{F}_n^m} \gamma_k(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha}).$$

En la suma:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{F}_n^m} \gamma_k(\mathfrak{S}_{\lambda^\alpha})$$

cada involución $\iota \in \mathcal{I}_k(\mathfrak{S}_n)$ aporta tantas unidades como la cantidad de subgrupos parabólicos que la contienen. Pensando de otra manera, podemos ver el número de $\alpha \in \mathcal{F}_n^m$ tales que $\iota \in \mathfrak{S}_{\lambda_\alpha}$. Pero esto es:

$$m^k \times m^{n-2k} = m^{n-k}$$

dado que α debe tomar valores constantes sobre ambos índices de las transposición disjuntas que interviene en la descomposición de ι.
Se concluye que:

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \times \gamma_k(\mathfrak{S}_n)$$

o también , en virtud de (1):

$$\gamma(\mathfrak{S}_n^m) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

Por otra parte, resulta simple ver que tanto el número de matrices simétricas, el número de pseudo-involuciones proyectivas coincide con:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} m^{n-k} \times \gamma_k(\mathfrak{S}_n).$$

REFERENCIAS

[1]. Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y., *A Gelfand model for Wreath Products*, arXiv:math.RT/08022824 v1, 2008.

[2]. Adin, R. M., Postnikov, A., Roichman, Y, *Comobinatorial Gelfand Models*, arXiv:math.RT/07093962 v2, 2008**.**

[3]. Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *A Gelfand model for the symmetric group*, Communications in Algebra, **29** (4), 1841 **-** 1851 (2001).

[4]. Aguado, J. L. and Araujo, J. O., *Representations of Finite Groups on Polynomial Rings.* Actas V Congreso de Matemática Dr. Antonio R. Monteiro, 35-40 (1999) Bahía Blanca.

[5]. Araujo, J.O., *A Gelfand model for a Weyl group of type Bn*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **44**, no. 2 (2003) 359-373.

[6]. Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Weyl group of type* D_n *and the*

branching rules $D_n \hookrightarrow B_n$. Journal in Algebra, vol. 294, (2005), 97-116.
[7]. Araujo, J. O. and Bigeón, J. J., *A Gelfand Model for the Symmetric Generalized Group*, por aparecer en Communications in Algebra.
[8]. Baddeley, R., *Models and Involution Models for Wreath Products and certain Weyl Groups*. Journal of London Mathematical Society no. **44**, serie 2 (1991) 55-74.
[9]. Bernstein, I, Gelfand, I. and Gelfand, S. *Models of representations of Lie groups*, Selected. Math. Soviet **1** (2) (1981) 121-142.
Can, H. *Representations of the generalized symmetric groups.* Beitr. Algebra Geom. 37, No.2, 289-307 (1996).
[1]. Carter, R. W. *Conjugacy classes in the Weyl group*. Compositio Math. 25 (1972), 159.
[2]. Cohen, A. M. *Finite complex reflection groups*. Ann. scient. ´Ec. Norm. Sup. 9 (1976), 379-436. Erratum: ibid. 11 (1978), 613.
[3]. Curtis, C. W. & Reiner, I. *Methods of Representation theory with Applications to Finite Groups and Orders*. Vol. I, John Wiley & Sons, 1981.
[4]. Howlett, R. and Zworestine, C., *On Klyachkos model for the representations of finite linear groups*. China Higher Education Press (Beijing), and Springer-Verlag (Berlin, Heidelberg), (2000), 229-246.
[5]. Humphreys, J. E. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 29, Cambridge University Press, 1990.
[6]. Inglis, N. F. J. and Saxl, J., *An explicit model for the complex representations of the finite general linear groups*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 424-431.
[7]. James, G. and Liebeck, M. *Representations and characters of groups.* Cambridge Mathematical Textbooks. 1993.
[8]. Kane, R. *Reflection groups and invariant theory*. CMS Books in Mathematics 5, Springer, New York, 2001.
[9]. Klyachko, A. A., *Models for the complex representations of the groups* $GL(n,q)$, Math. USSR Sbornik **48** (1984), 365379.
[1]. Kodiyalam, V. and Verma, D.N., *A natural representation model for symmetric groups*. arXiv:math.RT/0402216 v1, 2006.
[2]. Pantoja, J. and Soto-Andrade, J., *Fonctions sphériques et modèles de Gel'fand pour le groupe de mouvements rigides d'un espace paraeuclidien sur un corps local*. Comptes Rendus de L'Académie des Sciences 302, (1986), 463-466.
[3]. Serre, J. P. *Representaciones lineales de grupos finitos.* Ediciones Omega S. A. Barcelona 1970.
[4]. Shephard, G. C.and Todd, J. A. *Finite unitary reflection groups*. Canad. J. Math. 6 (1954), 274-304.
[5]. Springer, T., A *Construction of Representations of Weyl Groups*. Inventiones Mathematicae 44 (1978) 279-293. Sciences **302**, (1986), 463-466.

Dr. José Orlando Araujo
Profesor Titular
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires